

SSZX NOIP2023 查漏组合题解题报告

1 剪发

本题考察倒序并查集技巧。

1.1 10pts

直接做一遍数池塘即可。

复杂度 $O(tnm)$ 。

1.2 30pts

每个询问暴力的做一遍数池塘即可。

复杂度 $O(tnmq)$ 。

1.3 60pts

考虑倒序并查集。先将所有剪发过程保存下来，并模拟一遍，得到最终头皮的形态。然后将最终头皮上相邻连续的头发组成并查集，同时统计每一簇头发的大小，并记录最大值。然后按照操作顺序倒序“填充”头发，每次填充头发后重新统计答案：

①若填充处两侧目前没有头发，则说明该次剪发前头发比剪发后多了“填充”的这一簇，簇数+1，最大面积和 1 取 max；

②若填充处一侧目前有头发，则说明这次剪发没有改变簇数，将这个位置加入有头发一侧的并查集即可，然后重新统计最大值答案；

③若填充处两侧均有头发，则说明这次剪发将一簇头发“分”成了两簇，簇数-1（由于是倒序），然后将这个位置和左右两边加入同一个并查集，然后统计最大值答案。

最后按询问顺序输出答案即可。结合 30 分算法，可获得 60 分。

单次操作复杂度 $O(\alpha(nm))$ 。总复杂度 $O(tq\alpha(nm))$ 。

1.4 100pts

一维头皮升级为二维。将 60 分算法中“填充”头发的细节修改即可：

①每次填充先将簇数+1；

②依次检查填充处四周的头发，若某一侧有头发且与填充位置分属不同的并查集，则进行并查集合并，同时簇数-1，更新该并查集大小；

③将最终并查集大小与当前最大值答案取 max，得到新的最大值答案。

其余处理同 60 分算法。

单次操作复杂度 $O(\alpha(nm))$ 。总复杂度 $O(tq\alpha(nm))$ 。

2. 残片 (garbage) 题解

解法零

对于小测试点，特判、花式暴力皆宜... 吧？具体看你的实现方法了。

预计得分：5 至 20 分。

解法一

对于字符集大小 ≤ 5 的测试点，暴力枚举这 5 个字符的优先级关系后求解即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(5! \times \sum |s|)$ 。预计得分：20 分。

解法二

我们首先思考，**一个字符串什么时候能成为字典序最小的一个**？为了方便，我们以样例为例，假设我们要让 `abccd` 这个字符串字典序最小。尝试之后，应该有如下两种情况：

(1) 不存在一个字符串是该字符串的前缀。样例中有 `abc` 这个字符串，是 `abccd` 的前缀，故 `abccd` 不可能成为字典序最小。

(2) 否则，则找出该字符串与其他字符串首次不一样的字符。如比较 `abb` 与 `abccd`，二者首次不同在第三位的 `b` 与 `c`。如果要让 `abccd` 字典序最小，应有 $c < b$ 。

在情况 (2) 中，我们会得到若干个“不等”关系。如果这些“不等”关系存在矛盾（如 $c < b$ 、 $b < z$ 、 $z < c$ 三个条件），则该字符串的字典序不可能最小，反之可以。

可以发现，矛盾的不断关系类似于一种“循环”。我们将这些“不等”关系用图表示，对于字符 $1 <$ 字符 2 ，我们将字符 1 对应的点向字符 2 对应的点连一条有向边，则问题转化为判断这个图中是否有环。

这是一个容易的图论问题，DFS、BFS、拓扑排序、Tarjan 算法均可解决。

具体实现时，枚举每个字符串，暴力匹配出每一对首次不一样的字符，暴力建图后判环即可。

最坏时间复杂度 $\mathcal{O}(k(\sum |s| + 26^2))$ 。但是上界很难达到，预计得分：40 分或以上。

解法三

解法二的瓶颈在于匹配出每一对首次不一样的字符，并构建不等关系。我们需要优化这个过程。

这个问题可以用**字典树**快速解决。具体实现时，还是枚举每个字符串，但在匹配不一样的字符时，我们遍历字典树中该串的对应该路径，并在每一层枚举不同的字符。之后同样暴力建图，判环即可。

而情况 (1) 中的前缀存在问题也是字典树的经典应用，可以顺带完成。

最坏时间复杂度 $\mathcal{O}(26 \sum |s|)$ 。预计得分：100 分。

3. 最短路 (path.c/cpp)

代价的形式中对最大值和最小值的要求比较难处理，无法记录到最短路中直接计算，但可以将最大最小边均改成任意，即等价于对于每条路径可以选一条边免费，选一条边计算两次，问最短路。这样我们最优解一定是在某条路径上最大边免费，最小边计算两次，否则更劣。

那么这样就可以求分层图最短路了，改为求 $(1, 0)$ 到 $(i, 2)$ 的最短路，对每条边 (u, v, w) ，连 (u, k) 到 (v, k) 权值为 w ， $(u, 0)$ 到 $(v, 1)$ 权值为 $2w$ ， $(u, 1)$ 到 $(v, 2)$ 权值为 0 即可。