期望的计算公式：

$$E(X)=\sum_i i\times P(x=i)$$

期望的线性性：

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y),E(kX)=kE(x)$$

A 百事世界杯之旅

题目背景

复制Markdown 展开

“……在 2002 年 6 月之前购买的百事任何饮料的瓶盖上都会有一个百事球星的名字。只要凑齐所有百事球星的名字，就可参加百事世界杯之旅的抽奖活动，获得球星背包，随声听，更可赴日韩观看世界杯。还不赶快行动！”

题目描述

你关上电视，心想：假设有 n 个不同的球星名字，每个名字出现的概率相同，平均需要买几瓶饮料才能凑齐所有的名字呢？

考虑倒推，设 $f(x)$ 代表已经收集到 x 个名字后还需要买的饮料的期望次数，有 $f(n)=0$。

当已经收集到 i 个名字的时候，每次有 $\frac{i}{n}$ 的概率买到已有的名字，有 $\frac{n-i}{n}$ 的概率买到新名字，则从 i 到 $i+1$ 的期望步数为

$$S_i=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\frac{i}{n})^k\frac{n-i}{n}=\frac{n}{n-i}$$

或者根据下式得出：

$$f(i)=1+\frac{i}{n}f(i)+\frac{n-i}{n}f(i+1)$$

最终递推得到 $f(0)$ 的结果就是最终答案。

B 收集邮票

有 n 种不同的邮票，皮皮想收集所有种类的邮票。唯一的收集方法是到同学凡凡那里购买，每次只能买一张，并且买到的邮票究竟是 n 种邮票中的哪一种是等概率的，概率均为 $1/n$。但是由于凡凡也很喜欢邮票，所以皮皮购买第 k 次邮票需要支付 k 元钱。

现在皮皮手中没有邮票，皮皮想知道自己得到所有种类的邮票需要花费的钱数目的期望。

如果最终买了 m 次邮票，则最终花费为 $(m+1)m/2$。所以最终的花费只与买的次数相关。

由于期望的线性性，$E((m+1)m/2)=\frac{1}{2}[E(m^2)+E(m)]$，需要分别维护 m 的期望和 m^2 的期望。

对于 m 的期望，我们令 $f(x)$ 代表现在有 x 张邮票时拿满 n 张的期望步数，根据上一题的结论有 $f(x+1)=f(x)+\frac{n}{n-x}$，计算出 $f(0)$ 就是 m 的期望。

对于 m^2 的期望，令 $g(x)$ 代表有 x 张邮票时拿满 n 张的步数平方的期望，$p_1(i),p_2(i)$ 分别代表有 $x,x+1$ 张时通过 i 步拿满 n 张的概率，则

$$f(x)=\sum_i ip_1(i), f(x+1)=\sum_i ip_2(i)$$
$$g(x)=\sum_i i^2p_1(i), g(x+1)=\sum_i i^2p_2(i)$$
$$p_1(i)=\sum_{j<i} p_2(j)\times(\frac{x}{n})^{i-j-1}\times\frac{n-x}{n}$$
$$g(x)=\sum_i i^2\sum_{j<i}p_2(j)\times\frac{(n-x)x^{i-j-1}}{n^{i-j}}=\frac{n-x}{x}\sum_i i^2\sum_{j<i}p_2(j)\times\frac{x^{i-j}}{n^{i-j}}$$
$$g(x)=\frac{n-x}{x}\sum_i p_2(i)\times\sum_{j>i}j^2(\frac{x}{n})^{j-i}$$
$$f(x)=\frac{n-x}{x}\sum_i p_2(i)\times\sum_{j>i}j(\frac{x}{n})^{j-i}$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}(i+j)^2A^j=i^2\sum A^j+2i\sum jA^j+\sum j^2A^j$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}(i+j)A^j=i\sum A^j+\sum jA^j$$
$$\sum A^j=\frac{A}{1-A}=\frac{x}{n-x}$$
$$\sum jA^j=\frac{A}{(1-A)^2}=\frac{nx}{(n-x)^2}$$
$$\sum j^2A^j=\frac{A+A^2}{(1-A)^3}=\frac{n^2x+nx^2}{(n-x)^3}$$
$$f(x)=\sum_i(i+\frac{n}{n-x})p_2(i)$$
$$g(x)=\sum_i(i^2+\frac{2n}{n-x}i+\frac{n^2+nx}{(n-x)^2})p_2(i)$$
$$g(x)=\sum_i(i^2+i+\frac{n+x}{n-x}i+\frac{n(n+x)}{(n-x)^2})p_2(i)$$

化简可得

$$g(x)=g(x+1)+f(x+1)+\frac{(n+x)}{n-x}f(x)$$

C 概率充电器

SHOI 概率充电器由 $n-1$ 条导线连通了 n 个充电元件。进行充电时，每条导线是否可以导电以概率决定，每一个充电元件自身是否直接进行充电也由概率决定。随后电能可以从直接充电的元件经过通电的导线使得其他充电元件进行间接充电。

作为 SHOI 公司的忠实客户，你无法抑制自己购买 SHOI 产品的冲动。在排了一个星期的长队之后终于入手了最新型号的 SHOI 概率充电器。你迫不及待地将 SHOI 概率充电器插入电源——这时你突然想知道，进入充电状态的元件个数的期望是多少呢？

说明/提示

对于 30% 的数据，$n \le 5 \times 10^3$。

对于 100% 的数据，$n \le 5 \times 10^5$，$0 \le p, q_i \le 100$。

假设以 1 号点为根，那么每个点来电的情况可分为三类：

- 直接进行充电
- 从子树内部传来
- 从父节点处传来

如果只考虑前两种情况，设点 i 直接充上电的概率为 p_i，能够通电的总概率为 f_i，则

$$f_i = p_i + (1 - p_i) \times \left[1 - \prod_{v \in son_u} (1 - f_v)\right]$$

由于根节点没有父节点，所以根节点的 f 值就是答案，直接进行换根 DP 就可以得到每个点的答案。

D 游戏

可怜公司有 n 个办公室，办公室编号是 l 到 $l+n-1$，可怜会事先制定一个顺序，按照这个顺序依次检查办公室。一开始的时候，所有办公室的员工都在偷懒，当她检查完编号是 i 的办公室时候，这个办公室的员工会认真工作，并且这个办公室的员工通知所有办公室编号是 i 的倍数的办公室，通知他们老板来了，让他们认真工作。因此，可怜检查完第 i 个办公室的时候，所有编号是 i 的倍数(包括 i)的办公室的员工会认真工作。

可怜发现了员工们通风报信的行为，她发现，对于每种不同的顺序 p，都存在一个最小的 $t(p)$，使得可怜按照这个顺序检查完前 $t(p)$ 个办公室之后，所有的办公室都会开始认真工作。她把这个 $t(p)$ 定义为 p 的检查时间。

可怜想知道所有 $t(p)$ 的和。

但是这个结果可能很大，她想知道和对 10^9+7 取模后的结果。

数据范围

对于 20% 的数据，$r - l + 1 \le 8$。
对于另 10% 的数据，$l = 1$。
对于另 10% 的数据，$l = 2$。
对于另 30% 的数据，$l \le 200$。
对于 100% 的数据，$1 \le l \le r \le 10^7$。

考虑所有满足其不是 $[l,r]$ 中任意一个它自己以外的数的倍数的数，这些数只能通过自己被检查才能被标记。那么这些数里面最后一个被检查到的数的下标就是 $t(p)$。记这样的数为关键点，问题化为求最后一个关键点的期望位置。

可以计算每一个位置作为最后的位置的情况数。假设关键点个数为 k，这个位置需要放置一个关键点，并且剩下的 $k-1$ 个关键点需要放在这个位置前面。这样得到这个位置的合法情况数为

$$\binom{k-1}{i-1} \times k! \times (n-k)!$$

计算出所有位置的合法情况数相加即可。

E 亚瑟王

本题中我们将考虑游戏的一个简化版模型。 玩家有一套卡牌，共 n 张。游戏时，玩家将 n 张卡牌排列成某种顺序，排列后将卡牌按从前往后依次编号为 $1-n$。本题中，顺序已经确定，即为输入的顺序。每张卡牌都有一个技能。第 i 张卡牌的技能发动概率为 p_i，如果成功发动，则会对敌方造成 d_i 点伤害。也只有通过发动技能，卡牌才能对敌方造成伤害。基于现实因素以及小 K 非洲血统的考虑，p_i 不会为 0，也不会为 1，即 $0 < p_i < 1$。 一局游戏一共有 r 轮。在每一轮中，系统将从第一张卡牌开始，按照顺序依次考虑每张卡牌。在一轮中，对于依次考虑的每一张卡牌：

1. 如果这张卡牌在这一局游戏中已经发动过技能，则

1.1. 如果这张卡牌不是最后一张，则跳过之（考虑下一张卡牌）； 否则（是最后一张），结束这一轮游戏。

2. 否则（这张卡牌在这一局游戏中没有发动过技能），设这张卡牌为第 i 张

2.1. 将其以 p_i 的概率发动技能。

2.2. 如果技能发动，则对敌方造成 d_i 点伤害，并结束这一轮。

2.3. 如果这张卡牌已经是最后一张（即 i 等于 n），则结束这一轮；否则，考虑下一张卡牌。

请帮助小 K 求出这一套卡牌在一局游戏中能造成的伤害的期望值。

对于所有测试数据， $1 \le T \le 444$， $1 \le n \le 220$， $0 \le r \le 132$， $0 < p_i < 1$， $0 \le d_i \le 1000$。

除非备注中有特殊说明，数据中 p_i 与 d_i 均为随机生成。

根据期望的线性性，一套卡牌造成伤害的期望值等于每张牌造成伤害的期望值之和。

一张牌造成伤害的期望等于它的伤害乘上它触发的概率。

而每张牌被经过一次判定当且仅当这一轮它前面的牌都没有判定通过，所以编号为 i 的牌一共被判定 $r-j$ 次的概率就是前面 $i-1$ 张牌在这 r 轮中有 j 张牌成功发动了技能的概率。

记 $f_{i,j}$ 代表前 i 张牌中有 j 张牌发动技能的概率，则

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} \times (1-p_i)^{r-j} + f_{i-1,j-1} \times [1-(1-p_i)^{r-j+1}]$$

那么第 i 张牌触发的概率就是

$$\sum_{j=0}^{\min(r,i-1)} f_{i-1,j} \times [1-(1-p_i)^{r-j}]$$

时间复杂度 $O(Tnr)$