树上操作

stargazer

2024.8

树上操作?

热身题

给定 n 个点的树，q 次询问，每次给定 x, k，询问点 x 的 k 级祖先。$n, q \leq 10^7$

热身题

给定 n 个点的树，q 次询问，每次给定 x, k ，询问 x 的 k 级祖先。$n, q \leq 10^7$

离线询问。
考虑 dfs 时用一个栈维护当前点到根的序列，走到一个点放入栈中，离开时弹出，k 级祖先就是栈尾前的第 k 个点。

热身题

给定以 1 为根的树，每一秒随机选一个点并删去它与它子树，求整棵树都被删去的期望时间,$n \leq 1e7$

热身题

给定以 1 为根的树，每一秒随机选一个点并删去它与它子树，求整棵树都被删去的期望时间,$n \le 1e7$

和树上操作倒没啥关系.
考虑每个点对答案的贡献，如果祖先被选到了，那么自己就没用了。
如果自己被选到，那么对答案有 1 的贡献，那么概率就是它到根的所有点里选到它的概率，即 $1/\mathrm{dep}$，求和即可。

热身题

给一个图，每个点有流量流入流出差的要求 x_i，要求给每个边构造流量 y_i，使得满足整个图的所有点的流量要求,$n, m \leq 10^6$。

热身题

给一个图，每个点有流量流入流出差的要求 x_i，要求给每个边构造流量 y_i，使得满足整个图的所有点的流量要求,$n, m \leq 10^6$。

考虑只要生成树的边，其他边全部赋为 0，发现每个边的流量只和子树 x 之和相关，于是直接 dfs 一颗生成树即可。

热身题

求次小生成树（严格/不严格）,$n \leq 10^5$

考虑已经有一个最小生成树了，这时候应该怎么找次小　考虑模仿 kruscal 从小到大枚举边的过程。
枚举每一条非树边，然后在树上找这个环上边权最大的断开，这样就知道换一条边的代价，选择严格/不严格的最小代价即可。
通过树剖/倍增维护路径最大值。

最小生成树

kruscal: 每次加一个最小的边，正确性？
prim: 已联通的集合到外面的最小边。

BZOJ2238 MST

给定一个图，每次求删去一条边后的 MST，$n \leq 10^5$

BZOJ2238 MST

给定一个图，每次求删去一条边后的 MST，$n \le 10^5$

考虑首先删去非 mst 的边显然不影响答案，考虑删去一个 mst 里的边怎么找到新的答案。

BZOJ2238 MST

给定一个图，每次求删去一条边后的 MST，$n \leq 10^5$

考虑首先删去非 mst 的边显然不影响答案，考虑删去一个 mst 里的边怎么找到新的答案。

那么一定新加一条非树边，且是与删掉的这个边在一个环里的非树边。

类似前面次小生成树，考虑一个非树边对答案的影响，那么就是对于这个非树边与树连成的环，环上所有边删掉都可能被这个非树边替代，于是每个非树边就是对这些边有个取 min 的贡献，通过树剖维护即可。

codeforces gym102623D

给一个图，有 m 条边，其中连接 u, v 的边的代价为 $fib_u + fib_v$，求 $mst, n, m \leq 10^5$。

codeforces gym102623D

给一个图，有 m 条边，其中连接 u, v 的边的代价为 $fib_u + fib_v$，求 $mst, n, m \le 10^5$。

因为不能直接存边权做最小生成树，考虑 fib 的性质

codeforces gym102623D

给一个图，有 m 条边，其中连接 u, v 的边的代价为 $fib_u + fib_v$，求 $mst, n, m \leq 10^5$。

因为不能直接存边权做最小生成树，考虑 fib 的性质

可以将边用 $(\max(u, v), \min(u, v))$ 二元组作为边权，仍然能直接比较。

牛客多校 2024Round6D

给一个联通图，边有”轮”边和”切”边两种，要求删去一些边，使得图仍然联通，并且”轮”边至少在一个环中，”切”边不在任何环之中，$n, m \le 10^5$。

牛客多校 2024Round6D

给一个联通图，边有”轮”边和”切”边两种，要求删去一些边，使得图仍然联通，并且每个”轮”边都要至少在一个环中，”切”边不在任何环之中，输出任意方案即可。$n, m \leq 10^5$。

考虑因为所有轮边必须在环之中，所以先对所有轮边做边双，那么在边双的轮边一定都不需要删去，不在的都必须删去。

牛客多校 2024Round6D

给一个联通图，边有"轮"边和"切"边两种，要求删去一些边，使得图仍然联通，并且每个"轮"边都要至少在一个环中，"切"边不在任何环之中，输出任意方案即可。$n, m \leq 10^5$。

考虑因为所有轮边必须在环之中，所以先对所有轮边做边双，那么在边双的轮边一定都不需要删去，不在的都必须删去。
那么就只剩下切边了，直接拿出来做剩下的生成树即可。

O(1)Lca

欧拉序，Rmq

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

1、子树加，单点求和

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

1、子树加，单点求和

2、单点加，子树求和

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

1、子树加，单点求和

2、单点加，子树求和

3、子树加，子树求和

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

1、子树加，单点求和

2、单点加，子树求和

3、子树加，子树求和

4、链加，单点求和

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

1、子树加，单点求和

2、单点加，子树求和

3、子树加，子树求和

4、链加，单点求和

5、链加，子树加，单点求和

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

1、子树加，单点求和

2、单点加，子树求和

3、子树加，子树求和

4、链加，单点求和

5、链加，子树加，单点求和

6、链加链求和

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

1、子树加，单点求和

2、单点加，子树求和

3、子树加，子树求和

4、链加，单点求和

5、链加，子树加，单点求和

6、链加链求和

7、链加，链求和，子树加，子树求和。

树上信息维护

利用树剖/dfs 序等方式维护树上信息，线段树/树状数组。

1、子树加，单点求和

2、单点加，子树求和

3、子树加，子树求和

4、链加，单点求和

5、链加，子树加，单点求和

6、链加链求和

7、链加，链求和，子树加，子树求和。

8、换根？

洛谷 P4211

给一棵树，q 次询问，每次询问 l, r, z，求 $\sum_{i=l}^{r} dep(LCA(i, z))$，$n, q \leq 10^5$

洛谷 P4211

给一棵树，q 次询问，每次询问 l, r, z，求 $\sum_{i=l}^{r} dep(LCA(i, z))$，$n, q \leq 10^5$

先离线差分询问，变成询问前缀。

怎么处理 Lca？

洛谷 P4211

给一棵树，q 次询问，每次询问 l, r, z，求 $\sum_{i=l}^{r} dep(LCA(i, z))$，$n, q \le 10^5$

先离线差分询问，变成询问前缀。

怎么处理 Lca？

考虑将 $[1, r]$ 所有点到根全部加 1，和 z 的 Lca 深度和就是 z 到根的路径权值和。
离线询问从左往右做即可。

洛谷 P4211

给一棵树，q 次询问，每次询问 l, r, z，求 $\sum_{i=l}^{r} dep(LCA(i,z))$，$n, q \leq 10^5$

先离线差分询问，变成询问前缀。

怎么处理 Lca？

考虑将 $[1, r]$ 所有点到根全部加 1，和 z 的 Lca 深度和就是 z 到根的路径权值和。
离线询问从左往右做即可。

洛谷 P5305

给一棵树和一个数 k，q 次询问，每次询问 r, z，求 $\sum_{i=1}^{r} dep(LCA(i, z))^k$，$n, k, q \leq 10^5$

洛谷 P5305

给一棵树和一个数 k，q 次询问，每次询问 r, z，求 $\sum_{i=1}^{r} dep(LCA(i, z))^k$，$n, k, q \leq 10^5$

发现和上一道题基本没啥区别，只需要把处理一下 k 次方于是对权值差分一下改成 $dep_i^k - (dep_i - 1)^k$ 就行了。

路径的交

给一棵 n 个点的树和 m 条路径，对第 i 条路径求前 $i-1$ 条有多少路径与它相交（点相交）,$n, m \leq 10^5$,

路径的交

给一棵 n 个点的树和 m 条路径，对第 i 条路径求前 $i-1$ 条有多少路径与它相交（点相交）,$n, m \leq 10^5$,

考虑怎么刻画相交的情况，点，边？路径？
考虑 Lca

路径的交

给一棵 n 个点的树和 m 条路径，对第 i 条路径求前 $i-1$ 条有多少路径与它相交（点相交）,$n, m \leq 10^5$，

考虑怎么刻画相交的情况，点，边？路径？
考虑 Lca

首先是前面路径的 lca 在自己路径上的情况，那么之前路径 lca 处 $+1$ 修改，自己树剖，链查询？

路径的交

给一棵 n 个点的树和 m 条路径，对第 i 条路径求前 $i-1$ 条有多少路径与它相交（点相交）,$n, m \leq 10^5$,

考虑怎么刻画相交的情况，点，边？路径？
考虑 Lca

首先是前面路径的 lca 在自己路径上的情况，那么之前路径 lca 处 $+1$ 修改，自己树剖，链查询？
换成 Lca 子树加，然后查询差分，就是区间加单点查询。

路径的交

给一棵 n 个点的树和 m 条路径，对第 i 条路径求前 $i-1$ 条有多少路径与它相交（点相交）,$n,m \leq 10^5$,

考虑怎么刻画相交的情况，点，边？路径？
考虑 Lca

首先是前面路径的 lca 在自己路径上的情况，那么之前路径 lca 处 $+1$ 修改，自己树剖，链查询？
换成 Lca 子树加，然后查询差分，就是区间加单点查询。

再考虑 Lca 不在路径上，也就是穿出去的情况。

路径的交

给一棵 n 个点的树和 m 条路径，对第 i 条路径求前 $i-1$ 条有多少路径与它相交（点相交）, $n, m \leq 10^5$,

考虑怎么刻画相交的情况，点，边？路径？
考虑 Lca

首先是前面路径的 lca 在自己路径上的情况，那么之前路径 lca 处 $+1$ 修改，自己树剖，链查询？
换成 Lca 子树加，然后查询差分，就是区间加单点查询。

再考虑 Lca 不在路径上，也就是穿出去的情况。

仍然差分，u,v 处 $+1$，lca-2，答案就是这个路径 Lca 的子树和

为什么？

重心

定义：所有子树大小不超过 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 的点，一棵树可能会有一个或者两个重心。

重心

定义：所有子树大小不超过 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 的点，一棵树可能会有一个或者两个重心。

重心的移动

CSP-S2019 树的重心

给定一颗 n 个点的树，求单独删去每一条边之后，得到的两棵树的所有重心编号之和的和。$n \leq 10^5$

CSP-S2019 树的重心

给定一颗 n 个点的树，求单独删去每一条边之后，得到的两棵树的所有重心编号之和的和。$n \leq 10^5$

考虑求一个点对于哪些边有贡献。

分成三个部分考虑：

到根的链上的，到根链上点的其他子树的，子树内的

CSP-S2019 树的重心

给定一颗 n 个点的树，求单独删去每一条边之后，得到的两棵树的所有重心编号之和的和。$n \le 10^5$

考虑求一个点对于哪些边有贡献。

分成三个部分考虑：

对于到根的链上的：
记所有儿子里最大的 siz 为 c，一条边断开后子树内的 siz 为 s，到根链上的需要满足 $2(s - siz) \le s, 2c \le s$，即 $2c \le s \le 2siz$

CSP-S2019 树的重心

给定一颗 n 个点的树，求单独删去每一条边之后，得到的两棵树的所有重心编号之和的和。$n \le 10^5$

考虑求一个点对于哪些边有贡献。

对于到根的链上的：
记所有儿子里最大的 siz 为 c，一条边断开后子树内的 siz 为 s，到根链上的需要满足 $2(s - siz) \le s, 2c \le s$，即 $2c \le s \le 2siz$

到根链上点的其他子树的
$2(n - s - siz) \le n - s, 2c \le n - s$，即 $n - 2siz \le s \le n - 2c$

CSP-S2019 树的重心

给定一颗 n 个点的树，求单独删去每一条边之后，得到的两棵树的所有重心编号之和的和。$n \le 10^5$

考虑求一个点对于哪些边有贡献。

对于到根的链上的：
记所有儿子里最大的 siz 为 c，一条边断开后子树内的 siz 为 s，到根链上的需要满足 $2(s-siz) \le s, 2c \le s$，即 $2c \le s \le 2siz$

到根链上点的其他子树的
$2(n-s-siz) \le n-s, 2c \le n-s$，即 $n-2siz \le s \le n-2c$

这两种情况都可以边 dfs 边维护。

CSP-S2019 树的重心

给定一颗 n 个点的树，求单独删去每一条边之后，得到的两棵树的所有重心编号之和的和。$n \leq 10^5$ 且一定为奇数。

考虑求一个点对于哪些边有贡献。

自己点的子树内的边怎么处理？
一个简单的方法：选择重心作为根，这时候除了重心其他的点，对子树内的边一定没有贡献，因为 n 为奇数所以只有一个重心。

CSP-S2019 树的重心

给定一颗 n 个点的树，求单独删去每一条边之后，得到的两棵树的所有重心编号之和的和。$n \leq 10^5$ 且一定为奇数。

考虑求一个点对于哪些边有贡献。

自己点的子树内的边怎么处理？
一个简单的方法：选择重心作为根，这时候除了重心其他的点，对子树内的边一定没有贡献，因为 n 为奇数所以只有一个重心。

只需要考虑重心的影响就行，直接枚举每条边计算即可。

点分治

选择重心分治，求经过重心的情况，然后递归儿子。

gym104279B

n 层高的塔，每层有一个敌人，力量 a_i，经验值 b_i。如果玩家在 y 层，那么可以移动到 $y-1$ 和 $y+1$ 层。
每次移动到没去过的层的时候，都会与这层的敌人战斗，假设玩家当前力量为 x，如果 $x \geq a_i$，那么战胜敌人，力量变为 $x+b_i$，否则输掉游戏。
现在有 q 次询问，每次 x, v，表示玩家初始出生在 x，力量为 v（最初还必须与该楼层的敌人作战），问这次玩家输掉之前能获得的最大力量,$n, q \leq 10^6$。

gym104279B

n 层高的塔，每层有一个敌人，力量 a_i，经验值 b_i。如果玩家在 y 层，那么可以移动到 $y-1$ 和 $y+1$ 层。
每次移动到没去过的层的时候，都会与这层的敌人战斗，假设玩家当前力量为 x，如果 $x \geq a_i$，那么战胜敌人，力量变为 $x+b_i$，否则输掉游戏。
现在有 q 次询问，每次 x, v，表示玩家初始出生在 x，力量为 v（最初还必须与该楼层的敌人作战），问这次玩家输掉之前能获得的最大力量,$n, q \leq 10^6$。

考虑移动的过程，比如我们往上移动，通过了某个 a_k，那么再往上就只用考虑所有 $a_j > a_k$ 的 j。
考虑按照最大值分治建树，即建立一个笛卡尔树，那么我们移动的过程显然就变成了在树上不断往上走，每走到一个点，这个点的所有子树就一定都可以访问。

gym104279B

考虑移动的过程，比如我们往上移动，通过了某个 a_k，那么再往上就只用考虑所有 $a_j > a_k$ 的 j。
考虑按照最大值分治建树，即建立一个笛卡尔树，那么我们移动的过程显然就变成了在树上不断往上走，每走到一个点，这个点的所有子树就一定都可以访问。

设 $Sb_x = \sum_{y \in subtree(x)} b_y$，那么当前在 x，能走到 x 的父亲的条件就是 $a_{fa_x} - sb_x \le v$，其中 v 是初始的强度。
所以建立笛卡尔树后，对于每次询问，只需要通过树上倍增或者树链剖分等方法维护，找到第一个大于 v 的边，那么边的儿子的 $Sb + v$ 就是答案

gym102501J

有一个 n 个点的二叉树，每个点带数字，并且保证这个树满足最小堆性质（父亲数字不大于儿子的数字），给定这个树的中序遍历，求有多少种二叉树满足这个中序遍历，对 10^9+7 取模，$n \le 10^6$。

gym102501J

有一个 n 个点的二叉树，每个点带数字，并且保证这个树满足最小堆性质（父亲数字不大于儿子的数字），给定这个树的中序遍历，求有多少种二叉树满足这个中序遍历，对 10^9+7 取模，$n \leq 10^6$。

中序遍历：中左右。
显然根据堆性质，最小值一定是这个二叉树最上面的一部分。

gym102501J

有一个 n 个点的二叉树，每个点带数字，并且保证这个树满足最小堆性质（父亲数字不大于儿子的数字），给定这个树的中序遍历，求有多少种二叉树满足这个中序遍历，对 10^9+7 取模，$n \le 10^6$。

中序遍历：中左右。
显然根据堆性质，最小值一定是这个二叉树最上面的一部分。

并且这时候这些最小值之间剩下的每一段在树上的位置是确定的，所以我们只需要再考虑每一段内部形成树的方案数。

gym102501J

有一个 n 个点的二叉树，每个点带数字，并且保证这个树满足最小堆性质（父亲数字不大于儿子的数字），给定这个树的中序遍历，求有多少种二叉树满足这个中序遍历，对 10^9+7 取模，$n \leq 10^6$。

中序遍历：中左右。
显然根据堆性质，最小值一定是这个二叉树最上面的一部分。

并且这时候这些最小值之间剩下的每一段在树上的位置是确定的，所以我们只需要再考虑每一段内部形成树的方案数。

考虑这同一个值形成二叉树的方案数，那就是卡特兰数，乘起来就行。