

树上问题

在由 n 个节点构成的树中（确保 $n \geq 2$ ），Alice 和 Bob 轮流进行操作，Alice 先行。每次轮到某位玩家时，该玩家需选取一个节点移除，这会导致树分裂成多个连通部分，随后该玩家必须从这些部分中挑选并保留一个。当一轮操作后树仅剩单个节点时，执行该轮操作的玩家即告失败，对方则获胜。请确定是先手方还是后手方能够赢得游戏。

考虑菊花图，容易发现奇数儿子必输，偶数儿子必赢。然后再手搓一下特殊性质满二叉树，发现都是必胜的。我们对于任意一棵树，必输的删去任何一个点都是必胜的。我们会发现如下性质，（先手）必输的树连接上任何一个树都一定会变成（先手）必胜的，那么我们此时考虑一个树，并钦定一个根，假设其所有真子树（不包括自己）都是必胜的，那么我们最后一定留下来一个真子树是肯定不行的。这个时候是必输还是必胜呢？我们一层一层考虑，单点我们认为必胜，两层则需要根是偶度数必胜，否则必输；再往上一层，其子树都是必胜的时候要必胜，此时子树为单点或儿子数为偶数的双层树，此时我们能发现不能删掉双层树的叶子，否则会出现一个必输的双层树，那么操作后的状态为必胜；此时我们只能操纵根的儿子，因此我们可以把子树抽象成一个点，就又变成菊花图的形状了。那么这里我们就应该能看出必输的情况所有点的度数都是奇数。我们也可以继续向上考虑，发现子树都必胜则子树内节点度数都是奇数，删去非根儿子节点必然会创造一个必输的子树出来，所以还是看根的儿子数……于是可以得到上面的结论。

严谨证明：

对于一个必输状态（所有节点度数都是奇数），删去一个点剩下的所有连通块都有偶数节点；对于一个必胜状态，单点度数为0，也看做必胜，我们钦定根，并找到最深的一个偶数节点，删去其父亲，那么也打成条件，如果唯一偶数节点是根，删掉一个儿子即可到达必输状态。